Azonosító jel:

ÉRETTSÉGI VIZSGA • 2020. május 5.

MATEMATIKA

EMELT SZINTŰ ÍRÁSBELI VIZSGA

2020. május 5. 9:00

Időtartam: 240 perc

Pótlapok száma	
Tisztázati	
Piszkozati	

EMBERI ERŐFORRÁSOK MINISZTÉRIUMA

Fontos tudnivalók

1. A feladatok megoldására 240 perc fordítható, az idő leteltével a munkát be kell fejeznie.
2. A feladatok megoldási sorrendje tetszőleges.
3. A II. részben kitűzött öt feladat közül csak négyet kell megoldania. **A nem választott feladat sorszámát írja be a dolgozat befejezésekor az alábbi négyzetbe!** Ha a javító tanár számára *nem derül ki egyértelműen*, hogy melyik feladat értékelését nem kéri, akkor a kitűzött sorrend szerinti legutolsó feladatra nem kap pontot.
4. A feladatok megoldásához szöveges adatok tárolására és megjelenítésére nem alkalmas zsebszámológépet és bármilyen négyjegyű függvénytáblázatot használhat, más elektronikus vagy írásos segédeszköz használata tilos!
5. **A megoldások gondolatmenetét minden esetben írja le, mert a feladatra adható pontszám jelentős része erre jár!**
6. **Ügyeljen arra, hogy a lényegesebb részszámítások is nyomon követhetők legyenek!**
7. A gondolatmenet kifejtése során **a zsebszámológép használata – további matematikai indoklás nélkül – a következő műveletek elvégzésére fogadható el:** összeadás, kivonás, szorzás, osztás, hatványozás, gyökvonás, $n!$, $\binom{n}{k}$ kiszámítása, a függvénytáblázatban fellelhető táblázatok helyettesítése (sin, cos, tg, log és ezek inverzei), a π és az e szám közelítő értékének megadása, nullára rendezett másodfokú egyenlet gyökeinek meghatározása. További matematikai indoklás nélkül használhatók a számológépek az átlag és a szórás kiszámítására abban az esetben, ha a feladat szövege kifejezetten nem követeli meg az ezzel kapcsolatos részletszámítások bemutatását is. **Egyéb esetekben a géppel elvégzett számítások indoklás nélküli lépéseknek számítanak, így azokért nem jár pont.**
8. A feladatok megoldásánál használt tételek közül az iskolában tanult, névvel ellátott tételeket (pl. Pitagorasz-tétel, magasságtétel) nem kell pontosan megfogalmazva kimondania, elég csak a tétel megnevezését említenie, de az alkalmazhatóságát röviden indokolnia kell. Egyéb tétel(ek)re való hivatkozás csak akkor fogadható el teljes értékűnek, ha az állítást minden feltételével együtt pontosan mondja ki (bizonyítás nélkül), és az adott problémában az alkalmazhatóságát indokolja.
9. A feladatok végeredményét (a feltett kérdésre adandó választ) szöveges megfogalmazásban is közölje!
10. A dolgozatot tollal írja, de az ábrákat ceruzával is rajzolhatja. Az ábrákon kívül a ceruzával írt részeket a javító tanár nem értékelheti. Ha valamilyen megoldást vagy megoldásrészletet áthúz, akkor az nem értékelhető.
11. Minden feladatnak csak egy megoldása értékelhető. Több megoldási próbálkozás esetén **egyértelműen jelölje**, hogy melyiket tartja érvényesnek!
12. Kérjük, hogy **a szürkített téglalapokba semmit ne írjon!**

I.

1. Az $ABCD$ téglalap oldalainak hossza $AB = 17$ cm és $AD = 8$ cm.

a) Mekkora területű részt fed le a téglalapból az A középpontú, 17 cm sugarú kör?

b) Az $APCQ$ rombusz P csúcsa a téglalap AB oldalának belső pontja, Q csúcsa pedig a CD oldal belső pontja. Számítsa ki a rombusz kerületét!

a)	7 pont	
b)	5 pont	
Ö.:	12 pont	

2. **a)** Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletet!

$|x-2| = 7 + x - 0,25x^2$

b) Hány olyan egész szám van, amelyik megoldása az alábbi egyenlőtlenségnek?

$\log_2(x^2 - 200) < 20$

a)	7 pont	
b)	6 pont	
Ö.:	13 pont	

3. Az interneten 2018 nyarán több hírportálon is megjelent az alábbi két hír.
I. 2018 júliusában az álláskeresők 26,0%-a, 67 000 ember tartósan (több mint egy éve) keresett munkát;
II. 2018 júliusában az álláskeresők aránya a *munkavállalási korú népesség*hez viszonyítva 3,8%, a *gazdaságilag aktív népesség*hez viszonyítva pedig 5,6% volt. (Feltételezhetjük, hogy a munkavállalási korú népességnek részhalmaza a gazdaságilag aktív népesség.)

a) Számítsa ki a közölt adatok alapján az álláskeresők számát! Válaszát tízezer főre kerekítve adja meg!

b) A munkavállalási korú népességnek hány százaléka volt a gazdaságilag aktív népesség?

Egy szintén 2018-as, internetes hír arról szól, hogy 2017 decemberében a nemzetgazdasági bruttó havi átlagkereset 328 000 Ft volt, a bruttó havi keresetek mediánja pedig 256 000 Ft körül lehetett.

c) Adjon meg 7 olyan különböző pozitív számot, amelyek átlaga nagyobb, mint a mediánja! Adja meg a hét szám átlagát és mediánját is!

d) Virág úr úgy tudja, hogy ő többet keres, mint a dolgozók fele. Véleménye szerint emiatt neki az átlagkeresetnél többet kellene kapnia, mégis csak 283 000 Ft a havi bruttó bére. Ezért azt gondolja, hogy a közölt statisztikai adatok hibásak.
Indokolja röviden (1-2 mondatban), hogy Virág úr következtetése miért nem megalapozott!

a)	3 pont	
b)	4 pont	
c)	3 pont	
d)	2 pont	
Ö.:	12 pont	

4. Adott az $y = 7 - \frac{1}{2}x$ egyenletű *e* egyenes.

a) Egy négyzet egyik csúcsa az origó, egyik átlójának egyenese pedig az *e*.
Számítsa ki a négyzet középpontjának koordinátáit és a négyzet területét!

b) Számítsa ki annak a korlátos síkidomnak a területét, amelyet az $y = -\frac{(x-4)^2}{4} + 7$ egyenletű parabola és az *e* egyenes határol!

a)	7 pont	
b)	7 pont	
Ö.:	14 pont	

II.

Az 5-9. feladatok közül tetszése szerint választott négyet kell megoldania. A kihagyott feladat sorszámát írja be a 3. oldalon található üres négyzetbe!

5. Egy szigorúan monoton növekvő sorozat első négy tagja az $\{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$ halmaz eleme. A sorozat tagjai között nincsenek szomszédos egész számok.

a) Hányféleképpen választható meg a sorozat első négy tagja?

A háromjegyű pozitív egész számok közül véletlenszerűen kiválasztunk egyet.

b) Határozza meg annak a valószínűségét, hogy a kiválasztott szám számjegyei balról jobbra egyesével nőnek vagy egyesével csökkennek.

Az a, b, c és d szomszédos számjegyek a tízes számrendszerben, $a \neq 0$, és $a < b < c < d$. Az N szám kilences számrendszerbeli alakja $\overline{abc}$, nyolcas számrendszerbeli alakja pedig $\overline{bcd}$.

c) Határozza meg az N szám tízes számrendszerbeli alakját!

a)	5 pont	
b)	5 pont	
c)	6 pont	
Ö.:	16 pont	

Az 5-9. feladatok közül tetszése szerint választott négyet kell megoldania.
A kihagyott feladat sorszámát írja be a 3. oldalon található üres négyzetbe!

6. Egy szabályos tízszög legrövidebb átlója 6 cm hosszú.

a) Határozza meg a tízszög oldalának hosszát!

Legyen *G* egy tízpontú egyszerű gráf, melynek összesen 6 éle van.

b) Igaz-e, hogy *G* csúcsai közt biztosan van legalább két olyan, amelynek a fokszáma legalább 2? Válaszát indokolja!

Egy n pontú teljes gráf egyik élét pirosra színeztük ($n \geq 3$). Ezután a többi él közül véletlenszerűen kiválasztunk egyet. Legyen az A esemény az, hogy a kiválasztott élnek és a pirosra színezett élnek van közös csúcsa, a B esemény pedig az, hogy nincs közös csúcsuk.

c) Ha az A és a B esemény egyenlő valószínűségű, akkor hány pontja van a gráfnak?

a)	4 pont	
b)	3 pont	
c)	9 pont	
Ö.:	16 pont	

Az 5-9. feladatok közül tetszése szerint választott négyet kell megoldania.
A kihagyott feladat sorszámát írja be a 3. oldalon található üres négyzetbe!

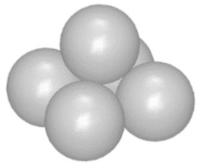
7. Egy társasjátékban a játékosok egyforma méretű golyókból négy rétegű piramist építenek *(ábra)*. A piramist $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 30$ golyó alkotja, amelyek közül 15 sötét, a többi 15 pedig világos.
A piramis építéséhez szükséges 30 golyót először kikészítik egy dobozba, majd az építés során a golyókat véletlenszerűen veszik ki a dobozból.

a) Mekkora annak a valószínűsége, hogy a fölülről számított második rétegbe kerülő 4 golyó mindegyike sötét színű lesz?

Az n rétegű piramis $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$ darab golyóból áll ($n \in \mathbf{N}^+$).

b) Bizonyítsa be (például teljes indukcióval), hogy $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

A kétrétegű piramis 5 golyóból áll *(ábra)*. Az alsó réteget alkotó 4 golyót egy vízszintes síklapon helyezzük el úgy, hogy az egymás melletti golyók érintsék egymást, középpontjaik pedig egy négyzet csúcsai legyenek. A golyók sugara 1 cm.



c) Számítsa ki a kétrétegű piramis magasságát!

a)	4 pont	
b)	6 pont	
c)	6 pont	
Ö.:	16 pont	

Az 5-9. feladatok közül tetszése szerint választott négyet kell megoldania. A kihagyott feladat sorszámát írja be a 3. oldalon található üres négyzetbe!

8. Egy élelmiszergyártó kisüzem levesporkészítő részlegében 700 kg levespor van raktáron. A raktárkészlet csökkentése érdekében az eladással foglalkozó vezető azt tervezi, hogy minden hónapban először (eladással, jótékony célú ajándékozással) 24%-kal csökkentik az aktuális raktárkészletet, ezután a készletet megnövelik a havonta előállított 60 kg levesporral (így például az első hónap végén 592 kg levespor lesz raktáron).

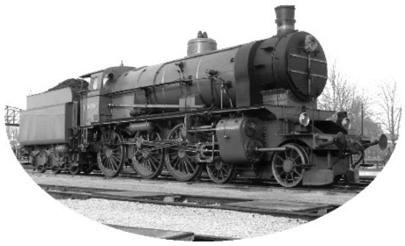
a) Ha sikerül a terv megvalósítása, akkor összesen hány kg levesport adnak/ajándékoznak el 18 hónap alatt?

b) Igazolja, hogy a tervezett módszert 18 hónapon túl (gondolatban akár végtelen sokáig) is alkalmazva a raktárkészlet minden hónapban csökken ugyan, de soha nem csökken 250 kg alá!

a)	9 pont	
b)	7 pont	
Ö.:	16 pont	

**Az 5-9. feladatok közül tetszése szerint választott négyet kell megoldania.
A kihagyott feladat sorszámát írja be a 3. oldalon található üres négyzetbe!**

9. Az 1917-ben gyártott és nosztalgiajárműként megőrzött 109.109 sorozatszámú gőzmozdony legnagyobb, úgynevezett hajtókerekének átmérője 1740 mm. A mozdony maximális engedélyezett sebessége 90 km/h.



a) Mekkora a hajtókerék percenkénti fordulatszáma 90 km/h sebességnél?

Több próbaút során is vizsgálták, hogy a mozdony szénfogyasztása hogyan függ a mozdony átlagsebességétől. A mérések szerint v km/h átlagsebesség esetén ($50 < v < 100$) jó közelítéssel $0,5v^2 - 65v + 3800$ kg volt az óránkénti szénfogyasztás. A mozdony a hozzákapcsolt szerkocsiban 6,1 tonna szenet tud magával vinni.

b) Számítsa ki, hogy 60 km/h átlagsebesség esetén (a megadott modell szerint) hány km hosszúságú útra elegendő a 6,1 tonna szénkészlet!

c) Határozza meg azt az átlagsebességet, amelynél a 6,1 tonna szén a lehető leghosszabb útra elegendő!

a)	4 pont	
b)	3 pont	
c)	9 pont	
Ö.:	16 pont	

	a feladat sorszáma	pontszám			
		maximális	elért	maximális	elért
I. rész	1.	12		**51**	
	2.	13			
	3.	12			
	4.	14			
II. rész		16		**64**	
		16			
		16			
		16			
		← nem választott feladat			
Az írásbeli vizsgarész pontszáma				**115**	

dátum | javító tanár

	pontszáma **egész számra** kerekítve	
	elért	programba beírt
I. rész		
II. rész		

dátum | dátum

javító tanár | jegyző